



## Exercice 2 [COMMUN] ..... (5 points)

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on admet que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont strictement positives.

1. (a) Calculez  $u_1$  et  $v_1$ .
- (b) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \geq 1$ .
- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq n + 1$ .
- (d) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
2. On pose, pour tout entier naturel  $n$  :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

- (b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite  $(r_n^2)$  et en déduire que  $(r_n)$  converge vers  $\sqrt{2}$ .
- (d) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

- (e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```

</> Code Python
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n

```

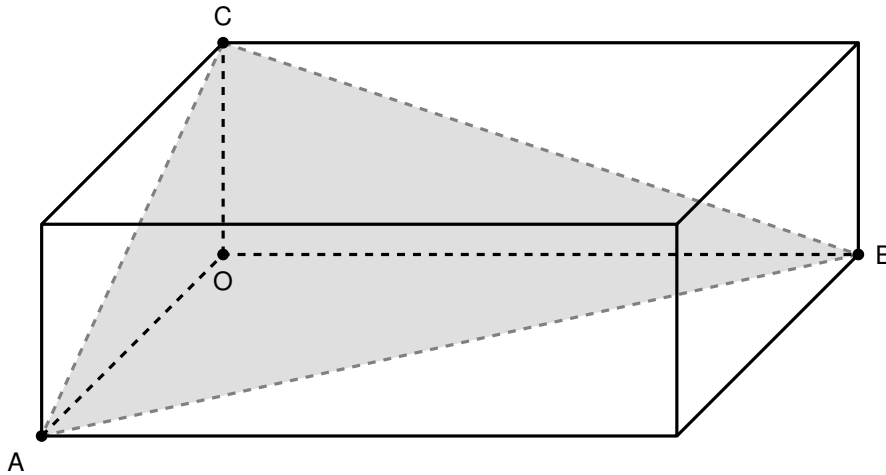
(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et  $10^{**}(-4)$  représente  $10^{-4}$ ).

La valeur de  $n$  renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

### Exercice 3 [COMMUN] ..... (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :  
 A de coordonnées  $(2; 0; 0)$ , B de coordonnées  $(0; 3; 0)$  et C de coordonnées  $(0; 0; 1)$ .



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  est normal au plan (ABC).  
 (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :  $3x + 2y + 6z - 6 = 0$ .
2. On note  $d$  la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).  
 (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $d$ .  
 (b) Montrer que la droite  $d$  coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées  $\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$ .  
 (c) Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :  $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ , où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.  
 En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

## Exercice au choix du candidat

**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.**

**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**

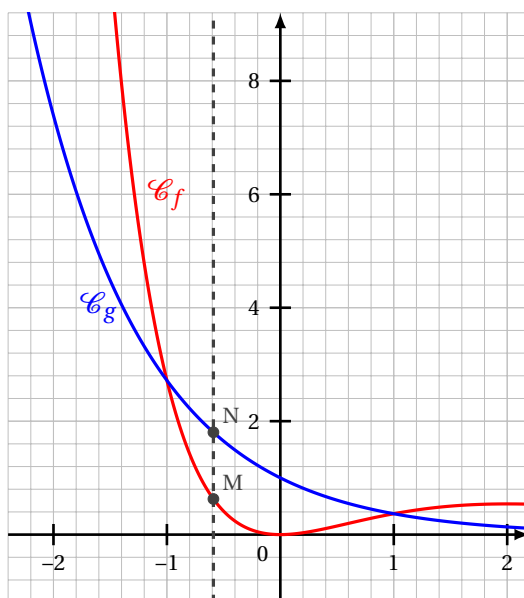
**Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.**

### Exercice A ..... (5 points)

**Principaux domaines abordés :**  
**Fonction exponentielle; dérivation.**

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



**La question 3. est indépendante des questions 1. et 2.**

1. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .  
 (b) Étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
2. Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[-1; 1]$ , on considère les points M de coordonnées  $(x; f(x))$  et N de coordonnées  $(x; g(x))$ , et on note  $d(x)$  la distance MN.  
 On admet que  $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$ .  
 On admet que la fonction  $d$  est dérivable sur l'intervalle  $[-1; 1]$  et on note  $d'$  sa fonction dérivée.
  - (a) Montrer que  $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$ .
  - (b) En déduire les variations de la fonction  $d$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .
  - (c) Déterminer l'abscisse commune  $x_0$  des points  $M_0$  et  $N_0$  permettant d'obtenir une distance  $d(x_0)$  maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance  $M_0N_0$ .
3. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x + 2$ .  
 On considère la fonction  $h$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $h(x) = e^{-x} - x - 2$ .  
 En étudiant le nombre de solutions de l'équation  $h(x) = 0$ , déterminer le nombre de points d'intersection de la droite  $\Delta$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice B ..... (5 points)**

**Principaux domaines abordés :**  
**Fonction logarithme; dérivation.**

**Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$ .

1. Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et  $0$ .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$
3. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ .
4. Calculer  $g(1)$  puis déterminer le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Partie II : Étude d'une fonction  $f$** 

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$ .

1. (a) On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- (b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  sur  $]0; +\infty[$  puis dresser le tableau de signes de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Partie III : Étude d'une fonction  $F$  admettant pour dérivée la fonction  $f$** 

On admet qu'il existe une fonction  $F$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  dont la dérivée  $F'$  est la fonction  $f$ .  
Ainsi, on a :  $F' = f$ .

On note  $\mathcal{C}_F$  la courbe représentative de la fonction  $F$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On ne cherchera pas à déterminer une expression de  $F(x)$ .

1. Étudier les variations de  $F$  sur  $]0; +\infty[$ .
2. La courbe représentative  $\mathcal{C}_F$  de  $F$  admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses? Justifier la réponse.