Asie, Bac Ge., 7 Juin 2021, sujet n°1

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous et un seul des deux exercices A ou B.

Exercice 1 [COMMUN] ....(5 points)

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 %de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n,, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

Code Python

```
def suite(n) :
    u = 1000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

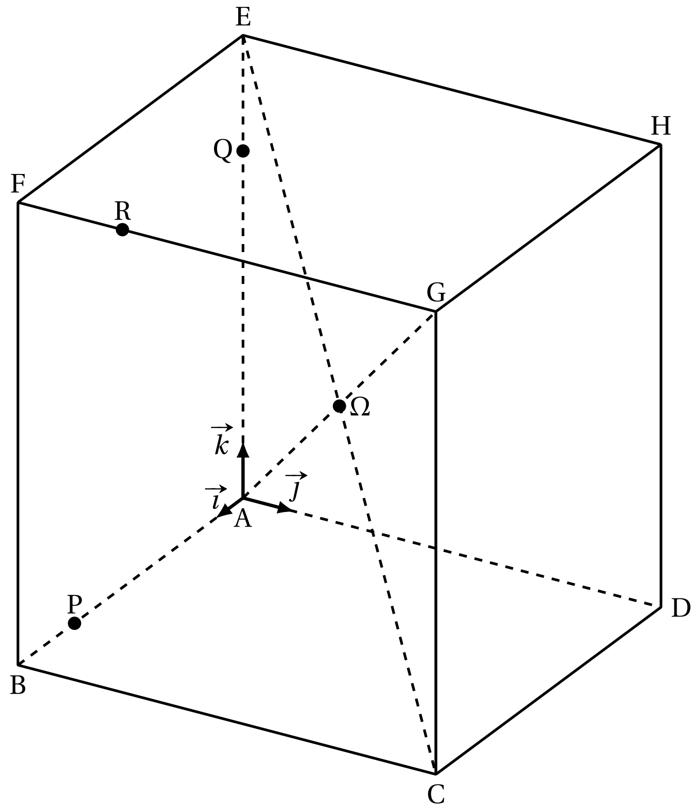
4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2\,500$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :
   $$u_n = -1\,500 \times 0{,}9^n + 2\,500.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
   Déterminer cette année.

Exercice 2 [COMMUN] .... (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω.

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8 ; 2 ; 8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1 ; -5 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4 ; 4 ; 4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Exercice 3 [COMMUN] .... (5 points)

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2. et 3. de cet exercice sont indépendantes.
Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
   Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
   On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
   (a) Déterminer la loi de probabilité de G.
   (b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.
   (d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

Exercice [AU CHOIX] .... (5 points)

*Le candidat doit traiter **un seul des deux exercices** A ou B.*
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

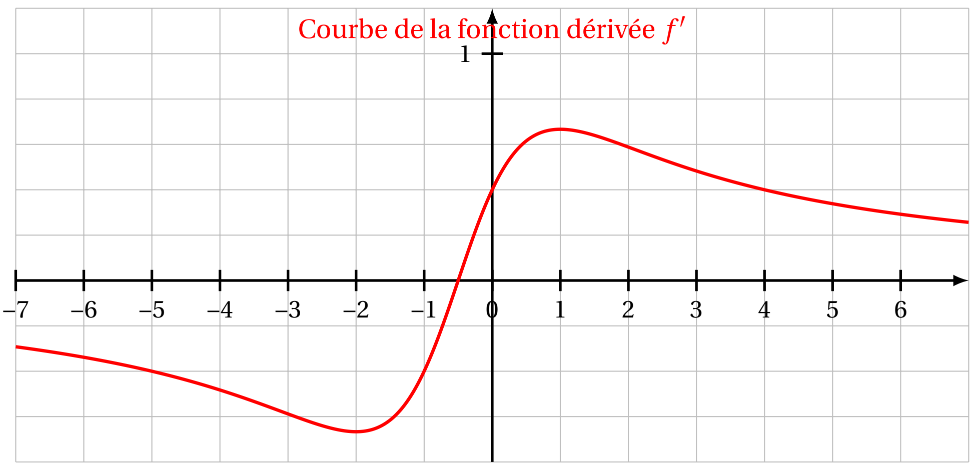
Exercice A .... (5 points)

Principaux domaines abordés :

- **Convexité**
- **Fonction ln**

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en O.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice B .... (5 points)

Principaux domaines abordés :

- **Étude de fonction, fonction exponentielle**
- **Équations différentielles**

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   (c) Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0{,}4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question **II.**1. puis la valeur approchée de α de la question **II.**3.(b) ainsi que la valeur $p(0)$.