Liban, Bac Gé., 19 Mai 2022, sujet n°2

Le candidat traite trois des **4 exercices** proposés.

Exercice 1 [Thème : Probabilités] .... (7 points)

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près.*

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

— 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;

— 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés.
On considère les événements suivants :

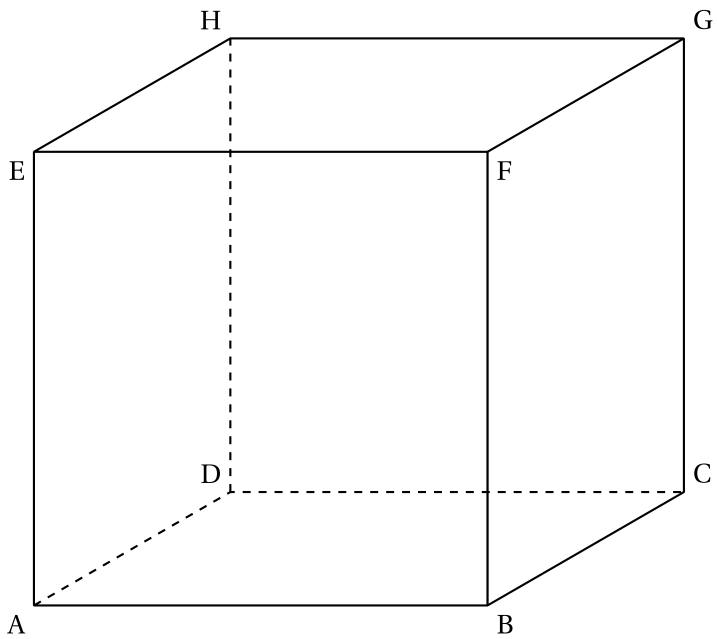
— F : « la personne choisie est une femme » ;

— C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. (a) Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.
   (b) Les événements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.
   On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.
   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
6. Soit n un entier naturel.
   On considère dans cette question un échantillon de n salariés.
   Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 2 [Thème : Géométrie dans l'espace] .... (7 points)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AE}\right)$.

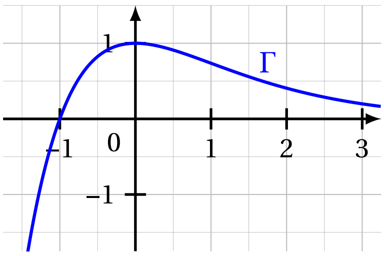
1. (a) Justifier que les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires.
   (b) Justifier que la droite (GH) est orthogonale au plan (EDH).
   (c) En déduire que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH).
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
   Déduire de la question 1.(c) qu'une équation cartésienne du plan (AGH) est :
$$y - z = 0.$$
3. On désigne par L le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3} ; 1 ; 0\right)$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EL).
   (b) Déterminer l'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH).
   (c) Démontrer que le projeté orthogonal de L sur le plan (AGH) est le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
   (d) Montrer que la distance du point L au plan (AGH) est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (e) Déterminer le volume du tétraèdre LAGH.
   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Exercice 3 [Thèmes : Fonctions, suites] .... (7 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1000} + x$.
   On peut affirmer que :
   (a) la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.
   (b) la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) la fonction g possède exactement un point d'inflexion.
   (d) la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
   On note Γ la courbe représentative de f'.
   On a tracé ci-dessous la courbe Γ.



   On note T la tangente à la **courbe** $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :
   (a) $y = x$ (b) $y = 0$
   (c) $y = 1$ (d) $x = 0$

3. On considère la suite $(_n)$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   On peut affirmer que la suite $(_n)$ est :
   (a) majorée et non minorée. (b) minorée et non majorée.
   (c) bornée. (d) non majorée et non minorée.

4. Soit k un nombre réel non nul.
   Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.
   On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.
   On peut affirmer que v_{10} est :
   (a) positif. (b) négatif.
   (c) du signe de k. (d) du signe de $-k$.

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1} = 2w_n - 4 \text{ et } w_2 = 8.$$

On peut affirmer que :

(a) $w_0 = 0$.

(b) $w_0 = 5$.

(c) $w_0 = 10$.

(d) Il n'est pas possible de calculer w_0.

6. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1} a_n \text{ et } a_0 = 1.$$

On peut affirmer que :

(a) la suite (a_n) est strictement croissante.

(b) la suite (a_n) est strictement décroissante.

(c) la suite (a_n) n'est pas monotone.

(d) la suite (a_n) est constante.

7. Une cellule se reproduit en se divisant en deux cellules identiques, qui se divisent à leur tour, et ainsi de suite. On appelle temps de génération le temps nécessaire pour qu'une cellule donnée se divise en deux cellules. On a mis en culture 1 cellule. Au bout de 4 heures, il y a environ 4 000 cellules.

On peut affirmer que le temps de génération est environ égal à :

(a) moins d'une minute.

(b) 12 minutes.

(c) 20 minutes.

(d) 1 heure.

Exercice 4 [Thèmes : Fonctions exponentielle et logarithme, suites] .. (7 points)

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$, on a :
   $$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;1]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :
   $$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}.$$
   (a) Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

</> Code Python

```
def termes(n) :
    a = 1/10
    b = 1
    for k in range(0, n) :
        c = ...
        b = ...
        a = c
    return(a,b)
```

2. Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).
3. On rappelle que la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1.$$
   (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
4. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;1]$,et que $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$.
   (a) Démontrer que $f(\mathrm{A}) = 0$.
   (b) Déterminer $\mathrm{A} - \mathrm{B}$.