Polynésie, Bac Gé., 5 Mai 2022, sujet n°2

Le candidat traite trois des **4 exercices** proposés.

Exercice 1 [Thèmes : fonctions, primitives, probabilités] .... (7 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x + 1$.
   Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

   (a) $\ln(x)$ (b) $\dfrac{1}{x} - 1$ (c) $\ln(x) - 2$ (d) $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2\,[1 - \ln(x)]$.
   Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

   (a) $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ (b) $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$

   (c) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (d) La fonction g n'admet pas de limite en 0

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0{,}9x^2 - 0{,}1x$.
   Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   (a) $\mathrm{K}(x) = \mathrm{H}(2x)$ (b) $\mathrm{K}(x) = 2\mathrm{H}(2x)$ (c) $\mathrm{K}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{H}(2x)$ (d) $\mathrm{K}(x) = 2\mathrm{H}(x)$

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ est :

   (a) $y = \mathrm{e}x + \mathrm{e}$ (b) $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$ (c) $y = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}$ (d) $y = \mathrm{e}x$

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0{,}2)^n < 0{,}001$ sont tous les nombres entiers n tels que

   (a) $n \leqslant 4$ (b) $n \leqslant 5$ (c) $n \geqslant 4$ (d) $n \leqslant 5$

Exercice 2 [Thème : probabilités] .... (7 points)

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

— 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;

— 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;

— 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les événements suivants :

— C : « le casque est contrefait » ;

— D : « le casque présente un défaut de conception » ;

— $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les événements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0{,}036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$ où $n = 35$ et $p = 0{,}036$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
   (c) Calculer $P(X \leqslant 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,992.

Exercice 3 [Thèmes : suites, fonctions] .... (7 points)

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite $(_n)$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0{,}008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sue $[0\,;100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;100]$ l'équation $f(x) = x$.
3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;100]$ et dresser son tableau de variations.

   (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
   $$0 \leqslant u_n \leq slant u_{n+1} \leqslant 100.$$

   (c) En déduire que la suite$(_n)$ est convergente.

   (d) Déterminer la limite ℓ de la suite $(_n)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

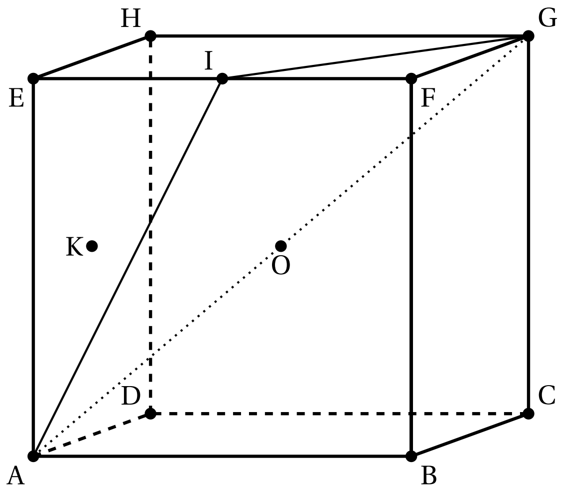
Code Python

```python
def seuil(p) :
    n = 0
    u = 40
    while u < p :
        n = n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3..

Exercice 4 [Thème : géométrie dans le plan et dans l'espace] .... (7 points)

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B *au plan* (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.
   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$ et $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $K\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.
6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ *d'une pyramide est donné par la formule* $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times b \times h$ *où* b *est l'aire d'une base et* h *la hauteur associée à cette base.*

1. (a) Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
   (b) En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
2. On admet que $AI = IG = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$.

   Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).