BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ x\, e^{x^2-3}$.
Une des primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 2x\, e^{x^2-3}$; **b.** $F(x) = (2x^2+1)\, e^{x^2-3}$; **c.** $F(x) = \frac{1}{2}x\, e^{x^2-3}$; **d.** $F(x) = \frac{1}{2}\, e^{x^2-3}$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{2n+1}$.
La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2 ;
b. géométrique de raison e;
c. géométrique de raison e^2 ;
d. convergente vers e.

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1{,}2u_n + 12$.

3. La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n > 10\,000$.

```
def seuil() :
      n=0
      u=15
      while …:
         n=n+1
         u=1.2*u+12
      return(n)
```

À la ligne 4, on complète par :

a. `u<=10 000` ; **b.** `u = 10 000` ; **c.** `u > 10 000` ; **d.** `n<= 10 000`.

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$. La suite (v_n) est :

a. une suite décroissante ;
b. une suite géométrique de raison 1,2 ;
c. une suite arithmétique de raison 60 ;
d. une suite ni géométrique ni arithmétique.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;0\,;-1)$, $B(3\,;-1\,;2)$, $C(2\,;-2\,;-1)$ et $D(4\,;-1\,;-2)$.

On note Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.

b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D ?

c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.

2. **a.** Calculer la distance CD.

b. Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $MD = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.

3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ .

b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.

c. En déduire la distance du point D à la droite Δ .

Exercice 3 (4 points)

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

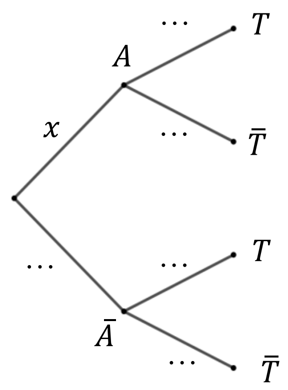
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'événement « l'individu est allergique » ;
- T l'événement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\bar{A}$ et $\bar{T}$ les événements contraires de A et T.

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'événement A : $x = p(A)$.



Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2. **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.

b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique ».

Partie B :

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0{,}08$.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10% des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 4 (7 points)

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction g par : $g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré (x^2-2x+2).
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5\ ;1]$, que l'on notera α.
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=e^x\ln x$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :
pour tout nombre réel $x>0$, $f'(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, on a : $f''(x)=e^x\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x\right)$.

2. On pourra remarquer que pour tout réel $x>0$, $f''(x)=e^x\times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la **partie A**.

a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0;+\infty[$. Justifier.
b. Justifier que la courbe C_f admet un unique point d'inflexion A.
c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Justifier.

3. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. Montrer que $f'(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{\alpha^2}(1-\alpha)$. On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$.
c. Démontrer que $f'(\alpha)>0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0;+\infty[$.