



Am. du Sud, Bac Gé., 26 septembre 2023, sujet n°1

Exercice 1.....(5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 + 2x^2 \ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$, justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = -4x \ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ et que $\alpha \in [1; e]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction `from lycee import *` permet d'accéder à la fonction `ln`.

```

</> Code Python
1  from lycee import *
2
3  def f(x) :
4      return 1+x**2-2*x**2*ln(x)
5
6  def dichotomie(p) :
7      a = 1
8      b = 2.7
9      while b-a > 10**(-p) :
10         if f(a) * f((a+b)/2) < 0 :
11             b = (a+b)/2
12         else :
13             a = (a+b)/2
14     return (a, b)

```

Il écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

- Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)
 Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)
 Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)
 Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.

On admet que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse α . Déterminer, en fonction de α , les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α .

Exercice 2.....(5 points)

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

- Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998–2020.
- Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.

On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.

La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,016.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

- Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.
- Par la méthode de votre choix que vous explicitez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0,99$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

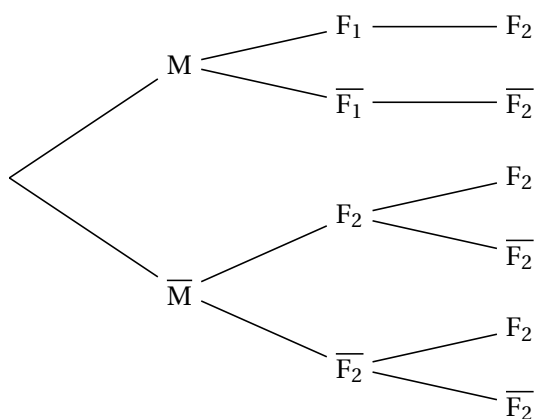
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les événements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et \bar{A} l'évènement contraire de A .



- a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
- b. Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,315 07.
- c. Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Exercice 3.....(5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(0;4;16), B(0;4;-10), C(4;-8;0) \text{ et } K(0;4;3).$$

On définit la sphère \mathcal{S} de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que $KM = 13$.

1.
 - a. Vérifier que le point C appartient à la sphère \mathcal{S} .
 - b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

- b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
- 3. On admet que la sphère \mathcal{S} coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.
On note D celui qui a une abscisse positive.
 - a. Montrer que le point D a pour coordonnées (12;0;0).
 - b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
 - c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
- 4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.
On rappelle la formule du volume \mathcal{V} d'un tétraèdre

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice 4.....(5 points)

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

- 1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
- 2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.
- 3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année 2022 + n . Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
 - a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b. Déterminer la limite de (P_n) .
2. Dans cette question $b = 0,2$.
 - a. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
Calculer v_0 et montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.
 - b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.