Asie, Bac Gé., 23 Mars 2023, sujet n°1

Exercice 1 .... (5 points)

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

Code Python

```python
def mystere(seuil):
    n = 0
    u = 400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u + 60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : `mystere(500)` ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres. Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.

Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger? Expliquer votre réponse.

Exercice 2 .... (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.
Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1;1;\frac{3}{4}\right),\ N\left(0;\frac{1}{2};1\right),\ P\left(1;0;-\frac{5}{4}\right).$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

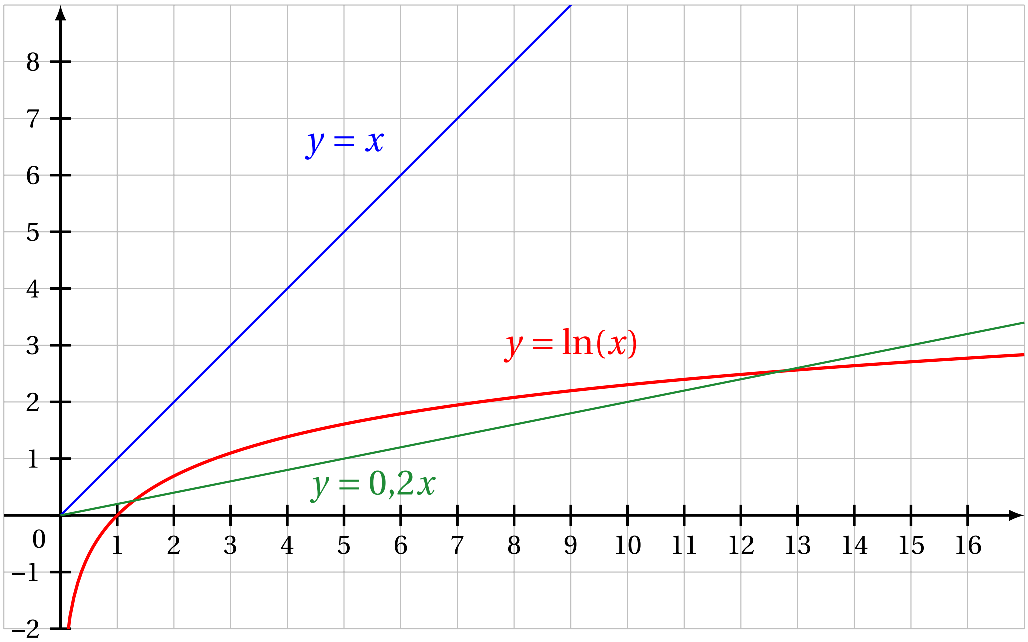
1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Des lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   (b) Calculer l'aire du triangle MNP.
5. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(5;-8;4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x-8y+4z=0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées F(1;0;1). Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont $L\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $FL=\frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $V=\frac{1}{3}\times$ aire d'une base $\times$ hauteur associée à cette base.

Exercice 3 .... (5 points)

Soit k un réel strictement positif. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ de paramètre k.

1. Conjectures graphiques :

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0{,}2x$:



   À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0{,}2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

   On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, par : $f(x) = \ln(x) - x$.
   On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extrema s'il y en a. Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

   k est un nombre réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $g(x) = \ln(x) - kx$.

   On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

(a) Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

(b) Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k

(c) Monter que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.

(d) Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.

(e) Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

Exercice 4 .... (5 points)

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses propos es est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15.
La bille numérotée 1 est rouge.
Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues.
Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.
On note R (respectivement B et V) l'évènement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

Question 1 :

Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{9}{15}$	$\dfrac{11}{10}$	Aucune des affirmations précédents n'est juste

Question 2 :

Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{10}$	Aucune des affirmations précédents n'est juste

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise.
Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ. Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

Question 3 :

Que vaut $P(G = 5)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	Aucune des affirmations précédents n'est juste

Question 4 :

Que vaut $P_R(G = 0)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	$\dfrac{1}{15}$	1	Aucune des affirmations précédents n'est juste

Question 5 :

Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{2}$	Aucune des affirmations précédents n'est juste

ANNEXE, à rendre avec la copie