



# Nouvelle-Calédonie, Bac Gé., 28 août 2023, sujet n°1

## Exercice 1.....(5 points)

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit un hasard un client et on considère les événements :

- V : « le client un bateau à voile » ;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

*Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.*

### Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.
4. En déduire  $P_{\bar{V}}(L)$ , probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.  
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à 0,01 près.

### Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'événement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer  $P(L \cap A)$  et  $P(\bar{L} \cap A)$ .
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux. À combien d'avaries peut-on s'attendre ?

### Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.  
Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à  $10^{-3}$ , qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

## Exercice 2.....(5 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer que  $u_1 = 12$ .  
 (b) Déterminer  $u_2$  en détaillant le calcul.  
 (c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- (b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.  
 Donner sa raison et son premier terme  $v_0$ .
- (b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- (c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- (d) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
4. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 10^7$ .

```

</> Code Python
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ..... :
        u = .....
        n = n+1
    return n
  
```

- (a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
- (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

**Exercice 3.....(5 points)**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*

*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*

*Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x + 1) e^x$ .

Une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est définie par :

- a.  $F(x) = 1 + x e^x$
- b.  $F(x) = (1 + x) e^x$
- c.  $F(x) = (2 + x) e^x$
- d.  $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$

\* \*  
\*

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

2. On considère les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1) \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 1 + r \\ z = -r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}); \quad (d_2) \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -1 + s \\ z = 2 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont :

- a. sécantes.
  - b. strictement parallèles.
  - c. confondues.
  - d. non coplanaires.
3. On considère le plan  $(P)$  dont une équation cartésienne est :  $2x - y + z - 1 = 0$ .  
On considère la droite  $(\Delta)$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 4 + u \\ z = 1 - u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

La droite  $(\Delta)$  est :

- a. sécante et non orthogonale au plan  $(P)$ .
  - b. incluse dans le plan  $(P)$ .
  - c. strictement parallèle au plan  $(P)$ .
  - d. orthogonale au plan  $(P)$ .
4. On considère le plan  $(P_1)$  dont une équation cartésienne est  $x - 2y + z + 1 = 0$ , ainsi que le plan  $(P_2)$  dont une équation cartésienne est  $2x + y + z - 6 = 0$ .

Les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont :

- a. sécants et perpendiculaires.
  - b. confondus.
  - c. sécants et non perpendiculaires.
  - d. strictement parallèles.
5. On considère les points  $E(1; 2; 1)$ ,  $F(2; 4; 3)$  et  $G(-2; 2; 5)$ .

On peut affirmer que la mesure  $\alpha$  de l'angle  $\widehat{FEG}$  vérifie :

- a.  $\alpha = 90^\circ$
- b.  $\alpha > 90^\circ$
- c.  $\alpha = 0^\circ$
- d.  $\alpha \approx 71^\circ$

**Exercice 4.....(5 points)**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal du plan.

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

1. (a) Démontre : que la limite de la fonction  $f$  en 0 est égale à 0.  
(b) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
3. (a) Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

- (b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe  $\mathcal{C}_f$ , est au-dessus de ses tangentes.
- (c) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
(On admettra que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ .)
4. (a) Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$ .  
(b) En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  ainsi que le tableau des variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
5. (a) En utilisant l'égalité  $f'(\alpha) = 0$ , démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que  $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$ .

- (b) En déduire un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  du maximum de la fonction  $f$ .