Polynésie, Bac Gé., 13 Mars 2023, sujet n°1

Exercice 1 [PROBABILITÉS] .... (4 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

— ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;

— ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

— 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;

— parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

— J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;

— T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;

— $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

Exercice 2 [ESPACE] .... (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère :

— d_1 la droite passant par le point $H(2;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

— d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. (a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
   (b) Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   (c) Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   (d) Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?
2. (a) Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
   (b) On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
   On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x+4y-z-22=0.$$

   Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $M(3;3;5)$.
3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M.
   Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :

$$\begin{cases} x = -r+3 \\ y = 2r+3 \\ z = 3r+5 \end{cases} \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

   (a) Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

Exercice 3 [FONCTION EXPON, ALGORITHMIQUE] .... (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. **Affirmation :**
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x}$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{F}(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x} + 4$.
Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre.
On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste `L`.

Code Python

```python
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L))
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([1,9,9,5,0,3,6,12,0,5])` renvoie 50.

Exercice 4 [SUITES, FONCTIONS] .... (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   (d) Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;-1]$ par :
$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$
   (a) Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1).

x	-3	-2	-1
variations de g	$\|$ $-\infty$ ↗	$g(-2)$	↘ 1

(b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

(a) En utilisant la formule donnée à la question **1.(a)**, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

(b) Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

(c) Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

(d) En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.