Polynésie, Bac Gé., 7 Septembre 2023, sujet n°1

Exercice 1 [Probabilités] .... (4 points)

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique. Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate-forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

— 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique ;

— lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de $0,5$;

— lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de $0,375$.

On considère les événements suivants :

— C : « un client a consulté la plate-forme numérique » ;

— E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique » ;

— T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

1. (a) Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique.
   On pourra utiliser un arbre pondéré.
   (b) Démontrer que $P(C) = 0,4$.
   (c) On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique.
   Calculer la probabilité que le client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique.
2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.
   (a) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Exercice 2 [Fonctions] .... (6 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}.$$
   (b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
   (d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   (e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

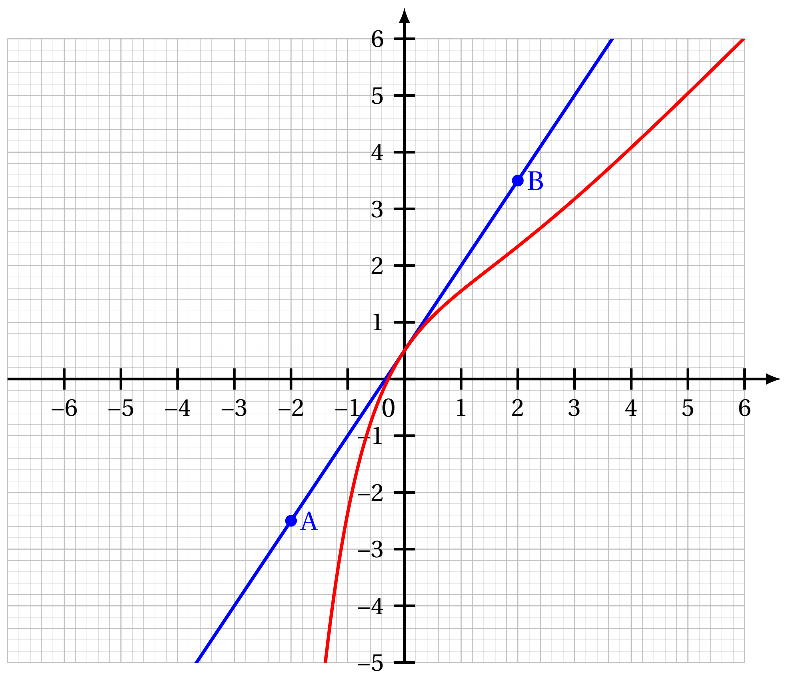
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)e^{-x} + x,$$

où a et b sont deux réels.
Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

— la courbe représentative de la fonction h ;
— les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;-2,5)$ et $(2\,;3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x},$$

   valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

Exercice 3 [Suites, algorithmique] .... (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.
   Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :
   $$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\frac{3}{4} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.
5. Étude duc as particulier $u_0 = 3$.
   On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

</> Code Python

```python
def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while ......... :
        u = .........
        n = .........
    return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.
   À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

Exercice 4 [Géométrie dans l'espace] .... (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ dans lequel on considère :

- les points $A(6\,;-6\,;6)$, $B(-6\,;0\,;6)$ et $C(-2\,;-2\,;11)$;
- la droite (d) orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (BC) et passant par le point A;
- la droite (d') de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -6-8t \\ y = 4t \\ z = 6+5t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Question 1

Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur de la droite (d) ?

(a) $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$ (b) $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ (c) $\vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\2\\0,2\end{pmatrix}$ (d) $\vec{u}_4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Question 2

Parmi les équations suivantes, laquelle est une représentation paramétrique de la droite (AB) ?

(a) $\begin{cases} x = 2t-6 \\ y = -6 \\ z = t+6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{cases} x = 2t-6 \\ y = -6 \\ z = -t-6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

(c) $\begin{cases} x = 2t+6 \\ y = -t-6 \\ z = 6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

(d) $\begin{cases} x = 2t+6 \\ y = t-6 \\ z = 6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 3

Un vecteur directeur de la droite (d') est :

(a) $\vec{v}_1\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ (b) $\vec{v}_2\begin{pmatrix}-14\\4\\11\end{pmatrix}$ (c) $\vec{v}_3\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$ (d) $\vec{v}_4\begin{pmatrix}8\\-4\\5\end{pmatrix}$

Question 4

Lequel des quatre points suivants appartient à la droite (d') ?

(a) $M_1(50\,;-28\,;-29)$ (b) $M_2(-14\,;-4\,;11)$

(c) $M_3(2\,;-4\,;-1)$ (d) $M_4(-3\,;0\,;3)$

Question 5

Le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal :

(a) $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (b) $\vec{n}_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ (c) $\vec{n}_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (d) $\vec{n}_4\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$