



Amérique du Nord, Bac Gé., 22 mai 2024, sujet n°2

Exercice 1.....(5 points)

Les données publiées le 1^{er} mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.

On note :

- N l'événement « le véhicule est neuf » ;
- R l'événement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- \bar{N} et \bar{R} les événements contraires des événements contraires de N et R .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

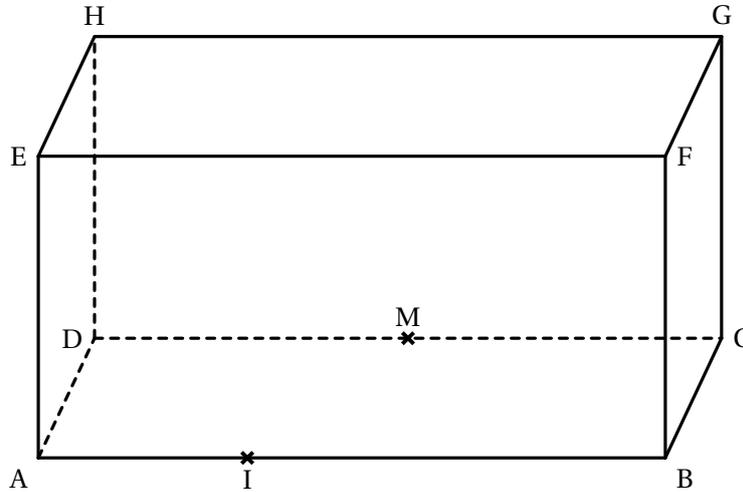
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p , que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0,9999$.

Exercice 2.....(5 points)

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment [AB] tel que $\vec{AB} = 3\vec{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].
On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).
(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

- (c) Le plan (\mathcal{P}) dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).
4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
Déterminer les coordonnées du point N.
5. Le point R de coordonnées $(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Exercice 3.....(5 points)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
</> Code Python
1 def seuil() :
2     n = 0
3     u = 0.5
4     while u < 0.95 :
5         n = .....
6         u = .....
7     return n
```

Exercice 4.....(5 points)

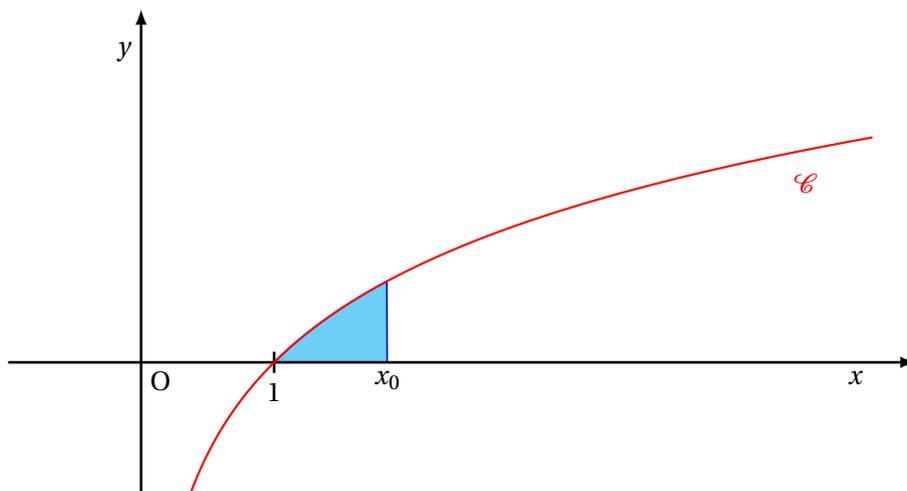
Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = a \ln(x)$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

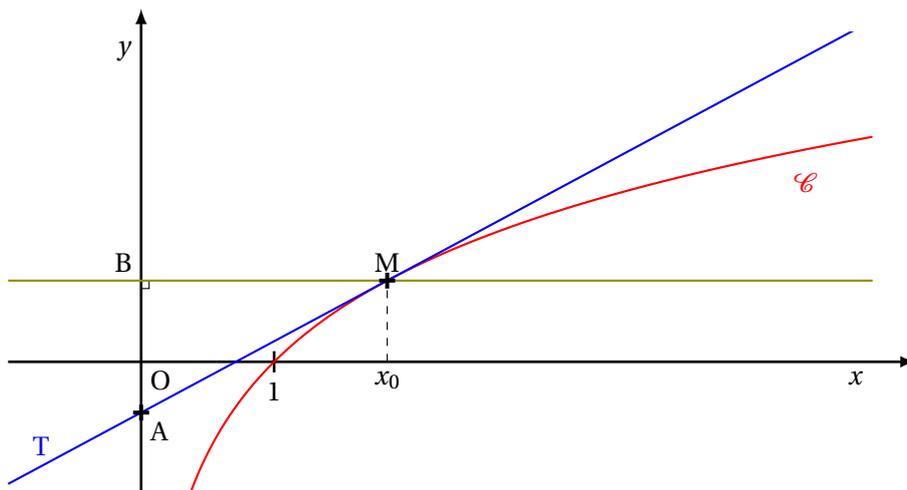
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a(x \ln(x) - x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine grisé en fonction de a et de x_0 .



On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera. *Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.*