Centres étrangers, Bac Gé., 05 juin 2024, sujet n°1

Exercice 1 .... (5 points)

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}.$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

— la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;

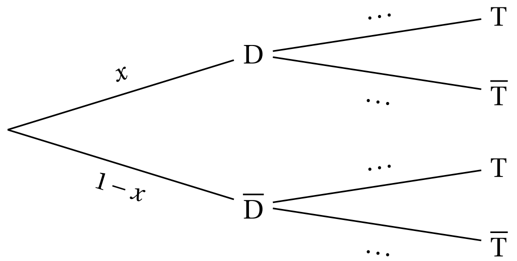
— la probabilité qu'un sportif déclaré positif sachant qu' il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

— D l'événement : « le sportif est dopé » ;

— T l'événement : « le test est positif »

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement T est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.
   La fonction f désigne la fonction définie à la **partie A**.
   Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. En donner une valeur arrondie au centième.
5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.
   (a) Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. *Arrondir le résultat au centième.*
   (b) Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
   Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ? *Argumenter en utilisant un résultat de la **Partie A**.*

Exercice 2 . . . . (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. (a) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.
   (b) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, $f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.
4. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.
   (b) On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
   Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

</> Code Python

```python
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln(2) - u ... 0.0001 :
        n = n+1
        u = ...
    return (u, n)
```

   (c) Donner la valeur de la variable `n` renvoyée par la fonction `seuil()`.

Exercice 3 .... (5 points)

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right)\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 4 .... (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère :

— les points $\mathrm{A}(-2\,;0\,;2)$, $\mathrm{B}(-1\,;3\,;0)$, $\mathrm{C}(1\,;-1\,;2)$ et $\mathrm{D}(0\,;0\,;3)$;

— la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$;

— la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   (b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 3y + 5z - 8 = 0.$$

   (c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
3. (a) Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
   On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

(b) Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

   (b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*