Métropole, Bac Gé., 20 juin 2024, sujet n°2

Exercice 1 .... (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

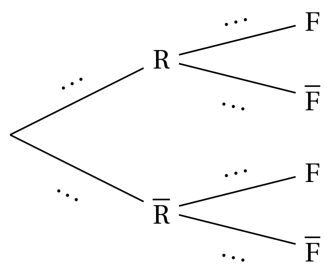
Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

— R : « le client est un client régulier » ;

— F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ sont évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ?



Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

— Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon.
Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.

— La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 10 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable aléatoire Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Exercice 2 .... (4 points)

Pour chacune dos affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0\,;4\,;-1)$, $B(6\,;1\,;5)$ et $C(6\,;-2\,;-1)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite (AB) est $2x+2y-z-9=0$.

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad ; \quad \mathscr{D}' : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 4-t' \\ z = -1+2t' \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 3 .... (5 points)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   (a) En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n < 2.$$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$.

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2, 1)` et `u(2, 2)` dans la console Python.
2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

</> Code Python

```python
def u(a, n) :
    u = a
    for k in range(n) :
        u = u**2 - 2 * u + 2
    return u
```

Partie C : étude dans le cas général.

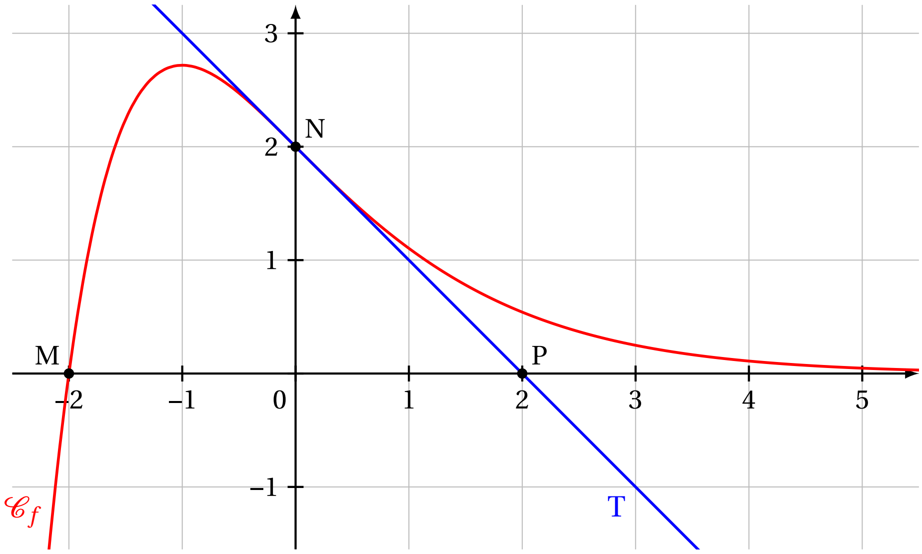
1. On considère la suite (v_n) définie pour tout enter naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 .... (6 points)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à T.

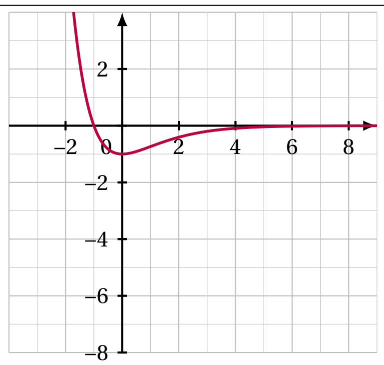
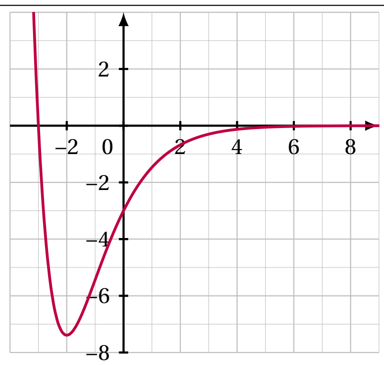
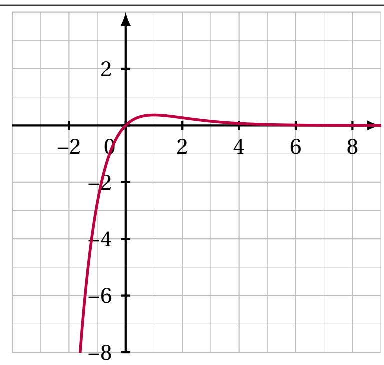
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.



Partie A : étude graphique.

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. (a) Donner $f(0)$.
   (b) Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique.

On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la **partie A**.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. (a) Étudier la convexité de f.
   (b) Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$\mathrm{I}(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\mathrm{I}(t) = (-t-3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

   (b) En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.