Polynésie, Bac Gé., 5 septembre 2024, sujet n°1

Exercice 1 .... (5 points)

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les événements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer $P(X = 8)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   (d) Calculer l'espérance de X.
   (e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.
   En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice 2 .... (6 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.
   Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

   Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C** :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

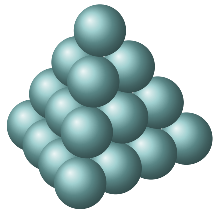
3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par
$$k(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$
   Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 1$.
   Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$$
   est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir :
$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}.$$

Exercice 3 .... (4 points)

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :



— le 1^er^ étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
— le 2^e^ étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
— le 3^e^ étage possède 9 boules;
— ...
— le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
   (a) Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
   (b) On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python. Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul `n`, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de `n` étages.

</> Code Python

```python
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = ...
    return ...
```

   (c) Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}.$$

   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

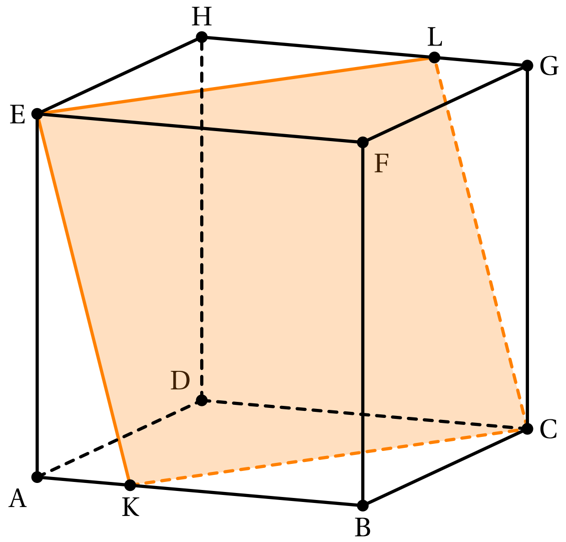
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible?

Exercice 4 .... (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$\mathrm{K}\,(m\,;0\,;0) \text{ et } \mathrm{L}\,(1-m\,;1\,;1)\,.$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
2. Dans cette question, $m=0$. Ainsi, le point L $(1\,;1\,;1)$ est confondu avec le point G, le point K $(0\,;0\,;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).
   (a) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1]$.
   (a) Démontrer que CKEL est un parallélogramme.
   (b) Justifier que $\overrightarrow{\mathrm{KC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KE}}=m(m-1)$.
   (c) Démontrer que CKEL est un rectangle si, et seulement si, $m=0$ ou $m=1$.
4. Dans cette question, $m=\frac{1}{2}$. Ainsi L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;1\,;1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$.
   (a) Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.
   (b) À l'aide de la question 3.(b), déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{CKE}}$.