BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points

$$A(-3\,;\,0\,;\,-1),\quad B(2\,;\,2\,;\,0),\quad C\left(-1\,;\,\tfrac{1}{2}\,;\,3\right),\text{ et } D(-6\,;\,0\,;\,-1).$$

On note I le milieu du segment $[AB]$.

On note $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (AB) passant par le point I.

1. a. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,-\frac{1}{2}\right)$.

b. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation $5x + 2y + z + 1 = 0$.

c. Les points C et D appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$? Justifier.

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point D et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

b. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées du point H.

c. Calculer la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

3. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CI) est

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = 3 - 7t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -1 + 5s \\ y = 2 - 12s \\ z = -s \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Montrer que les droites (d) et (CI) se coupent orthogonalement.

Exercice 2 (6 points)

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Un village organise une fête.

Partie A

Les organisateurs de la fête recherchent 3 personnes pour tenir la buvette.
15 villageois se portent volontaires pour cette mission.

1. Combien existe-t-il de manières de choisir les 3 personnes qui tiendront la buvette parmi les 15 villageois volontaires ?

2. Parmi les 15 villageois volontaires, il y a 5 hommes et 10 femmes.
Les organisateurs souhaitent à présent que parmi les 3 personnes qui tiendront la buvette, il y ait 1 homme et 2 femmes.

En respectant le souhait des organisateurs, combien existe-t-il de manières de choisir les 3 personnes qui tiendront la buvette parmi les 15 villageois volontaires ?

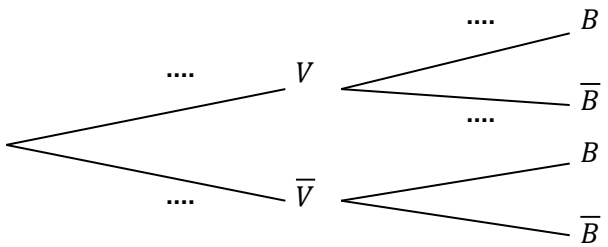
Partie B

Les participants à la fête peuvent habiter le village ou non, consommer une boisson ou non. On dispose des informations suivantes :

- 20 % des participants à la fête habitent le village. Parmi eux, les trois quarts ont consommé une boisson ;
- la moitié des participants ont consommé une boisson.

On choisit au hasard un participant à la fête et on note les évènements suivants :
V : « le participant habite le village » ;
B : « le participant consomme une boisson ».

1. L'arbre pondéré ci-dessous représente la situation.
Recopier cet arbre et compléter les pointillés.



2. Déterminer la probabilité que le participant habite le village et consomme une boisson.

3. On note $P_{\overline{V}}(B)$ la probabilité que le participant consomme une boisson sachant qu'il n'habite pas le village.

Montrer que $P_{\overline{V}}(B) = \frac{7}{16}$.

Partie C

1. Le *jeu de l'anneau* consiste à lancer 5 fois un anneau en direction d'un piquet. À chaque fois que l'anneau tombe sur le piquet, on dit que le lancer est *réussi*.



On suppose que la probabilité qu'un lancer donné soit réussi est égale à 0,2 et que les lancers sont indépendants les uns des autres.

On note N la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers réussis.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire N et donner ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité $P(N = 3)$ en écrivant la formule qui permet d'obtenir le résultat.

c. Lorsque le lancer est réussi, le joueur marque 10 points, lorsqu'il est manqué, le joueur ne marque aucun point.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de points marqués par le joueur sur l'ensemble des 5 lancers.

Montrer que l'espérance et la variance de la variable aléatoire X sont $E(X) = 10$ et $V(X) = 80$.

2. Le *jeu des quatre dés* consiste à lancer quatre dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. Le nombre de points marqués par le joueur est égal à la somme des chiffres affichés par les dés. Ainsi, si tous les dés affichent la face "4", le joueur marque 16 points.



On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de points marqués par le joueur pour ce jeu.

Déterminer la probabilité $P(Y = 24)$.

3. On admet que l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y sont

$$E(Y) = 14 \text{ et } V(Y) = \frac{35}{3}.$$

Un joueur joue successivement au *jeu de l'anneau* puis au *jeu des quatre dés*. Si, sur l'ensemble des deux jeux, le joueur, marque au moins 44 points, il gagne une peluche.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que la probabilité que le joueur gagne une peluche est inférieure ou égale à 0,25.

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - y = 0.$$

On note f la fonction solution de l'équation différentielle (E) telle que $f(1) = 1$.

Affirmation : $f(0) = \mathrm{e}^{-1}$.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Affirmation : La suite (S_n) diverge.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$u_n = \frac{n + \cos n}{n + 1}.$$

Affirmation : La suite (u_n) converge vers 1.

4. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, par

$$v_{n+1} = 4v_n - 6.$$

Affirmation : Pour tout entier naturel n, on a $v_n = 2 + 4^{n+1}$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

Partie A

1. a. Calculer la valeur exacte de $f(1)$ et de $f(\mathrm{e})$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

c. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale dont on donnera une équation.

2. a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a

$$f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}.$$

En déduire que, sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, la fonction f est concave.

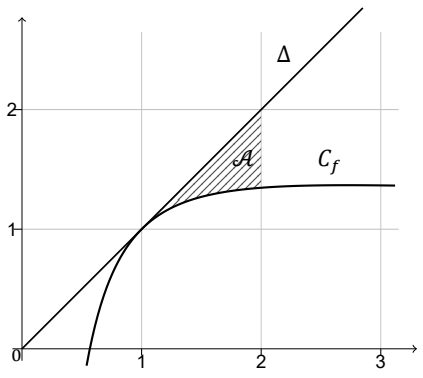
b. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Montrer qu'une équation de la tangente T est $y = x$.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2]$, on a $f(x) \leq x$.

Partie B

On note $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, de la surface située entre la droite Δ d'équation $y = x$, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

La figure ci-contre représente la situation.



1. On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $I = \frac{1}{2}\big(\ln(2)\big)^2$.

2. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.