BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (5 points)

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Une mission spatiale s'intéresse aux traces de vie microbienne sur la planète Mars. Pour cela, elle réalise des forages. Lorsqu'un forage permet de détecter une trace potentielle de vie microbienne, on dit que le forage est *fructueux*.

Partie A

Pour réaliser les forages, la mission spatiale utilise parfois des instruments conçus par le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales).

On dispose des informations suivantes :

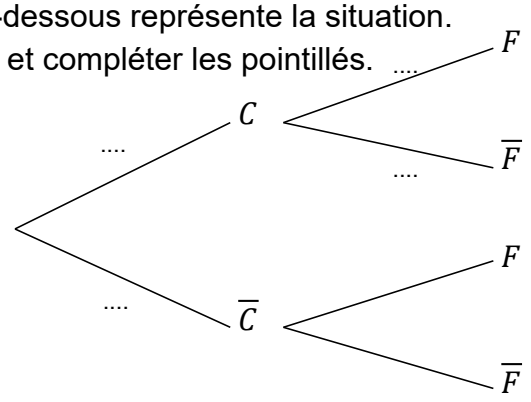
- 60 % des forages utilisent des instruments conçus par le CNES, et parmi eux, 18 % sont fructueux ;
- sur l'ensemble de tous les forages, 12 % sont fructueux.

On choisit un forage au hasard et on considère les évènements suivants :

C : « le forage utilise un instrument conçu par le CNES » ;

F : « le forage est fructueux ».

1. L'arbre pondéré ci-dessous représente la situation.
Recopier cet arbre et compléter les pointillés.



2. Déterminer la probabilité que le forage utilise un instrument conçu par le CNES et qu'il soit fructueux.

3. Montrer que la probabilité $P(\overline{C} \cap F)$ est égale à 0,012.

4. Un ingénieur affirme que la probabilité qu'un forage soit fructueux est six fois plus importante lorsque le forage utilise un instrument conçu par le CNES que lorsque ce n'est pas le cas.

Cette affirmation est-elle exacte ?

Partie B

Les forages réalisés par la mission spatiale sont entreposés dans un laboratoire.
Un étudiant choisit, au hasard, dans ce laboratoire, un échantillon de 20 forages.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de forages de cet échantillon qui sont fructueux.

On rappelle que, pour un forage donné, la probabilité qu'il soit fructueux est égale à 0,12.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins 10 % des forages de cet échantillon soient fructueux.

3. On note n un entier naturel.
On considère désormais un échantillon aléatoire de n forages.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un forage fructueux au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,999.

Partie C

On considère deux forages : un forage n°1 et un forage n°2.
On suppose que les coûts respectifs, en euros, de ces forages peuvent être modélisés par deux variables aléatoires indépendantes C_1 et C_2 ayant la même espérance, notée μ, et le même écart-type, noté σ.

On donne $\mu = 1000$ et $\sigma = \sqrt{5000}$.

On note C la variable aléatoire définie par $C = C_1 + C_2$.

1. Montrer que l'écart-type de la variable aléatoire C est égal à 100.

2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la somme des coûts des deux forages soit comprise entre 1800 et 2200 est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 2 (5 points)

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère les points

$A(1\,;\,0\,;\,1), B(2\,;\,2\,;\,3), C(1\,;\,0\,;\,2), D(1\,;\,1\,;\,3)$ et $E(3\,;\,2\,;\,1)$.

On considère la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = 5t - 5 \\ z = t + 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

On note $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Vérifier que le point C appartient à la droite Δ.

2. On considère le plan $\mathcal{P}$ ayant pour équation $x - 3 = 0$.
Montrer que la droite Δ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point F dont on déterminera les coordonnées.

3. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABD).
En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

4. Montrer que le point E appartient au plan (ABD).

5. Les droites (AB) et (DE) sont-elles sécantes ?

Partie B

On considère une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\,1\,;\,2\right)$.

1. Vérifier que le point H appartient à la droite (AB) et à la sphère $\mathcal{S}$.

2. Montrer que le point H est le seul point commun à la droite (AB) et à la sphère $\mathcal{S}$.

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On s'intéresse au nombre N de mots de six lettres (ayant un sens ou non) que l'on peut écrire avec les lettres A, B, C, D, E, en utilisant exactement deux fois la lettre A, et exactement une fois chacune des autres lettres.
Exemples : AABCDE ; BACADE ; CDBAEA.

Affirmation 1 : $N = 120$.

2. On considère l'équation différentielle (E) $y' + 0,2y - 4 = 0$.

Affirmation 2 : La solution de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 20\,(1 - \mathrm{e}^{-0,2t})$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 2. \end{cases}$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 10$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge vers 8.

4. On considère un réel u. On note $I(u)$ l'intégrale définie par

$$I(u) = \int_{-u}^{u} x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Affirmation 5 : $I(u) = 0$.

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.

4. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'' sa fonction dérivée seconde. On admet que, pour tout réel x, on a

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Existe-t-il deux points distincts de la courbe $\mathcal{C}$ ayant des tangentes parallèles ?

6. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python.

```
from math import exp
from math import log
def seuil() :
   x=0
   y=log(2)
   while y>=0.01 :
        x=x-0.1
        y=log(1+exp(x))
   return x
```

On rappelle qu'en langage Python `log` désigne la fonction logarithme népérien et `exp` désigne la fonction exponentielle.

Donner la valeur renvoyée par l'instruction `seuil()` et interpréter le résultat.